На правах рукописи

Аухадиев Марат Альфредович

C^*-алгебраические квантовые полугруппы

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Казань — 2013

Работа выполнена на кафедре "Высшая математика"

ФГБОУ ВПО Казанский государственный энергетический университет

Научный руководитель:	Григорян Сурен Аршакович доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО КГЭУ
Научный консультант:	Липачева Екатерина Владимировна кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВПО КГЭУ
Официальные оппоненты:	Хелемский Александр Яковлевич доктор физико–математических наук, профессор, МГУ Амосов Григорий Геннадьевич доктор физико–математических наук, ведущий научный сотрудник, МИАН
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится 28 марта 2013 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И.Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, НБ КФУ).

Автореферат разослан   февраля 2013 г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф-м.н., доцент Липачёв Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. После открытия двойственности Понтрягина для абелевых групп, появилась серия теорем о двойственности для неабелевых групп: теорема Т. Таннаки[1], М.Г. Крейна[2], а также В.Ф. Стайнспринга[3], Н. Татсуума[4]. На основе теоремы двойственности В.Ф. Стайнспринга Г.И. Кац в 1963 г. ввел понятие "кольцевых групп", и с помощью этого объекта предложил подход к построению теории двойственности для унимодулярных локально компактных групп, используя алгебру измеримых по инвариантной мере существенно ограниченных функций на этой группе. Он ввел понятие таких гомоморфизмов как копроизведение, коединица и антипод. Алгебра с указанными гомоморфизмами была позже названа алгеброй Каца. Впоследствии М. Такесаки[5], используя подход Г.И. Каца, определил групповую алгебру локально компактных групп в общем случае как инволютивную абелеву алгебру Хопфа-фон Ноймана с левой инвариантной мерой.

Развитие математической физики повлекло возобновление интереса к алгебрам Хопфа и появление термина "квантование" среди математиков. Существуют два принципиально различных подхода к квантованию. Наиболее известный, особенно в отечественной литературе – это алгебраический подход. В таком виде квантовые группы ввели В. Дринфельд и М. Джимбо в 1983-1985 годах, основываясь на теории уравнений Янга-Бакстера, развитой Л.Д. Фаддеевым и П.П. Кулишом, Н.Ю. Решетихиным, Е.К. Скляниным, Л.А. Тахтаджяном, и на работах, посвященных квантовому методу обратной задачи. Коротко, этот подход заключается

[1] T. Tannaka. Uber den Dualitatssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen // Tohoku Math. J., 45, 1939, P. 1-12.

[2] М.Г. Крейн. Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры // Докл. Акад. Наук СССР, 69, 1949, С. 725–728.

[3] W.F. Stinespring. Positive functions on C*-algebras // Proc. Amer. Math. Soc., 1955, P. 211-–216.

[4] N. Tatsuuma. An extension of AKHT theory of locally compact groups // Kokyuroku RIMS, 314, 1977.

[5] M. Takesaki. Duality and von Neumann algebras // Bull. Amer. Math. Soc., **77**:4, 1971, P. 553–557.

в деформации обертывающих алгебр полупростых алгебр Ли.

Теория компактных квантовых групп и полугрупп относится ко второму, более позднему подходу. Польский физик С.Л. Воронович[6], а также Л.Л. Ваксман и Я.С. Сойбельман[7] предложили использование операторных алгебр в теории квантовых групп и построили пример квантовой группы $SU_q(2)$. Позднее Вороновичем для этого подхода, в духе некоммутативной геометрии, развитой А. Конном, было сформулировано понятие компактной квантовой группы как C*-алгебры с дополнительной структурой. Это понятие явилось C*-алгебраическим аналогом алгебры Хопфа, а значит, включает в себя более ранний алгебраический подход. Теория компактных квантовых групп основана на понятии алгебры Каца, алгебры Хопфа-фон Ноймана, что позволило исследовать обобщение теории двойственности Понтрягина на некоммутативные квантовые группы. Данная теория, кроме самостоятельного интереса, имеет широкое приложение в современной математической физике.

Теории компактных квантовых групп посвящено достаточно большое число статей. Большинство из нетривиальных примеров построены по следующему принципу. Из классической группы (например $SU(2)$) конструируется *-алгебра Хопфа, которая пополняется и замыкается по универсальной C*-норме ($SU_q(2)$). Затем доказывается, что копроизведение в алгебре Хопфа продолжается на полученную C*-алгебру, и превращает эту алгебру в компактную квантовую группу.

С другой стороны, вопрос о задании структуры компактной квантовой группы по конкретной C*-алгебре остается открытым.

Позже в работах А. Ван Даэля[8] возникло естественное обобщение компактных квантовых групп – локально компактная квантовая полугруппа. Этот более широкий класс объектов мало изучен. В настоящее

[6]S.L. Woronowicz. Compact quantum groups // Symetries quantiques (Les Houches), 1995, pp. 845–884.

[7] Л.Л. Ваксман, Я.С. Сойбельман. Алгебра функций на квантовой группе SU(2)// Функциональный анализ и его приложения, т.22, 3, 1988, С. 1–14.

[8]A. Van Daele. Multiplier Hopf Algebras // Trans. Amer. Math. Soc., 342, 1994, P. 917-–932.

время нет устоявшегося определения компактной квантовой полугруппы. Однако проводятся исследования, направленные на определение этого объекта и построение примеров. Один из таких примеров можно найти работе К.Кавамура[9], где квантовая структура задается на прямой сумме алгебр Кунца. Задача построения нетривиальной структуры компактной квантовой полугруппы на конкретной C*-алгебре стала активно изучаться лишь в последние годы.

Цель работы. Построение нетривиальных примеров компактных квантовых полугрупп на некоммутативных C*-алгебрах. Задание структуры компактных квантовых полугрупп на алгебре Теплица и полугрупповых C*-алгебрах. Исследование таких компактных квантовых полугрупп, объединение их в одну категорию. Построение структуры банаховой алгебры на двойственном пространстве к полугрупповой C*-алгебре при помощи заданной квантовой структуры, а также интегрального исчисления при помощи меры Хаара. Предложение подхода для исследования двойственности между дискретными абелевыми полугруппами с сокращением и компактными квантовыми полугруппами, включающий двойственность Понтрягина для абелевых групп.

Общая методика исследования. В работе применяются методы функционального анализа и теории функций. Для построения и исследования примеров квантовых полугрупп используется операторный подход. Основные определения теории компактных квантовых полугрупп взяты из публикаций А. Ван Даэля, С.Л. Вороновича, Дж. Мерфи и Л. Тюсец.

Научная новизна. С появлением операторного подхода в теории квантовых групп возник вопрос существования и задания непрерывного

[9] Kawamura, K. C*-bialgebra defined by the direct sum of Cuntz algebras // J. Algebra, 319, 2008, pp. 3935–3959.

копроизведения на конкретных C*-алгебрах. Ранее этот вопрос был мало изучен. В данной работе рассматривается такая задача для целого класса C*-алгебр. В частности, приводится построение структуры компактной квантовой полугруппы на алгебре Теплица.

Ранее полугрупповые C*-алгебры не рассматривались в теории некоммутативных пространств, компактных квантовых полугрупп и компактных квантовых групп. В данной диссертации впервые показано, что класс C*-алгебр, порожденных изометриями, можно рассматривать как алгебры функций на некоторой компактной квантовой полугруппе.

Наиболее известный представитель этого класса – алгебра Теплица. Эта алгебра ранее встречалась в работах по теории квантовых групп. Так, в литературе[10] алгебра Теплица возникает как деформация алгебры функций на единичном диске U. Эта деформация является алгеброй функций на квантовом пространстве, называемом *квантовым диском*. Следовательно, алгебра Теплица описывает квантовый диск. Возникает вопрос существования на квантовом диске структуры квантовой полугруппы или квантовой группы.

П. Солтан[11] высказал предположение, что алгебра Теплица не соответствует никакой компактной квантовой группе и привел некоторые аргументы в пользу этого суждения. Однако, в силу отсутствия доказательства, этот вопрос остается открытым.

В данной работе алгебра Теплица наделяется структурой алгебры функций на компактной квантовой полугруппе. Доказывается, что эта квантовая полугруппа содержит единичную окружность как подгруппу. Затем полученные результаты обобщаются на полугрупповые C*-алгебры, порожденные изометриями.

Для построенной квантовой полугруппы показан ряд свойств, харак-

[10] S. Klimek, A. Lesniewski. Quantum Riemann Surfaces I. The Unit Disc // Commun. Math. Phys., 146, 1992, pp. 103–122.

[11] P.M. Soltan. When a Quantum Space is not a Group? // Banach Center Publications, Proceedings of "Banach Algebras 2009", 91, 2010, P. 353–364.

терных для теории, развитой С.Л. Вороновичем, но не встречавшихся ранее у квантовых полугрупп. Построенные компактные квантовые полугруппы объединяются в одну категорию. Построен инъективный функтор из этой категории в категорию абелевых полугрупп. Таким образом, впервые предъявляется способ квантования уже имеющейся абелевой полугруппы, без параметра q.

Впервые для исследования компактной квантовой полугруппы используется теория инверсных полугрупп, и слабых алгебр Хопфа. Ранее связь между полугрупповыми биалгебрами инверсных полугрупп и конечномерными биалгебрами была показана А.М. Вершиком[12].

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и приведенные конструкции открывают новые возможности в изучении теорий квантовых симметрий и суперсимметрий, а также в их практическом применении.

Апробация работы. Основные результаты были доложены на следующих конференциях и семинарах:

- Operator Algebras and Quantum Groups - Conference in honour of S.L. Woronowicz's seventieth birthday, г. Варшава, Польша, 19-23 сентября 2011. Название доклада: Infinite Compact Quantum Semigroup.

- Noncommutative Geometry and Quantum Groups, г. Осло, Норвегия, 8-15 июня 2012. Название доклада: On compact quantum semigroups and reduced semigroup C*-algebras.

- Operator Theory, г. Тимишоара, Румыния, 2-7 июля 2012 г. Название доклада: The reduced semigroup C*-algebra and its dual algebra.

[12] А.М. Вершик. Двойственность Крейна, позитивные 2-алгебры и дилатация коумножений // Функциональный анализ и его приложения, Т. 41 (2), 2007, с. 24–43.

- Семинар профессора А.Я. Хелемского “Алгебры в анализе”, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 2 ноября 2012 г.

- Петербургский семинар по теории представлений и динамическим системам, 6 февраля 2013 г., г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургское отделение математического института им. В.А. Стеклова РАН.

- Шестая международная молодежная научная конференция «Тинчуринские чтения», Казань, 27-29 апреля 2011 г., “Построение структуры биалгебры на алгебре Теплица”.

- Десятая международная Казанская летняя научная школа-конференция «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», Казань, 1-7 июля 2011 г., “Бесконечномерная компактная квантовая полугруппа”.

- Десятая международная Казанская научная школа-конференция «Лобачевские чтения-2011», Казань, 31 октября-4 ноября 2011 г., “Структура некоторых C*-биалгебр”.

- Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук», Казань, ноябрь 2011 г., “Compact quantum semigroup”.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 10 работ, список которых приведен в конце автореферата. В работах [1], [2], [7] С.А. Григоряну принадлежат постановки задач, доказательство утверждений принадлежат двум другим соавторам в равной мере. В работах [3], [5], [6], опубликованных в соавторстве, результаты принадлежат авторам в равной мере. Работы [1]–[3] опубликованы в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Работа набрана в системе LaTeX2e и содержит 122 страницы.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Построен первый пример компактной квантовой полугруппы на некоммутативной C*-алгебре – алгебре Теплица $\mathcal{T}$. Доказано, что эта компактная квантовая полугруппа содержит в себе плотную слабую алгебру Хопфа с тем же копроизведением. Приведены примеры неэквивалентных копроизведений, задающих структуру компактной квантовой полугруппы на алгебре Теплица. Доказано, что стандартная компактная квантовая группа на $C(S^1)$ является квантовой подгруппой в $(\mathcal{T}, \Delta)$.

2. На двойственном пространстве к алгебре $\mathcal{T}$ определяется структура ассоциативной банаховой алгебры с единицей. Найден функционал Хаара на $(\mathcal{T}, \Delta)$. Доказано, что банахова алгебра регулярных борелевских мер на окружности со сверткой в качестве умножения изометрически вкладывается в двойственную алгебру к алгебре Теплица.

3. Построена категория $\mathcal{QS}_{\rm red}$ компактных квантовых полугрупп на категории приведенных полугрупповых C*-алгебр. Показано существование инъективного функтора из категории $\mathcal{QS}_{\rm red}$ в категорию $\mathcal{S}_{\rm ab}$ абелевых дискретных полугрупп с сокращением.

Основное содержание работы

Первая глава, состоящая из семи параграфов, посвящена описанию квантовых групп в рамках алгебраического подхода. Такие квантовые группы называются конечными, поскольку в этой теории используются лишь конечномерные алгебры. Вся теория компактных квантовых групп основывается на аксиомах и конструкциях, приведенных в первой главе. В параграфе 1.2.2 приводится описание понятия *-алгебры Хопфа — основного класса квантовых групп, появившегося задолго до самого понятия квантовой группы.

Глава 2 состоит из двух разделов. Первый посвящен предварительным сведениям о C*-алгебрах. C*-алгебра — это комплексная инволютивная банахова алгебра, в которой норма удовлетворяет следующему соотношению для любого a:

$$\|aa^*\| = \|a\|^2.$$

Второй раздел представляет собой краткое описание основных фактов теории C*-алгебр Хопфа. Изложение теории C*-алгебр Хопфа во втором разделе второй главы начинается с определения компактных матричных псевдогрупп, так как исторически именно они были предшественниками компактных квантовых групп и полугрупп. Позднее, исключив из понятия компактной матричной псевдогруппы лишние требования, С.Л. Воронович определил компактную квантовую группу.

Пусть A – унитальная C*-алгебра. Унитальный *-гомоморфизм $\Delta\colon A \to A \otimes A$ называется *копроизведением* на A, если он удовлетворяет условию коассоциативности:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta.$$

Пара (A, Δ) C*-алгебры A с единицей и копроизведением Δ на A называется *компактной квантовой полугруппой.*

Компактная квантовая группа – это компактная квантовая полугруппа (A, Δ), такая что множества

$$(1 \otimes A)\Delta(A) \quad \text{и} \quad (A \otimes 1)\Delta(A)$$

являются линейно плотными в $A \otimes A$.

Классическим примером компактной квантовой группы (полугруппы) является алгебра непрерывных функций на компактной группе (полугруппе), где копроизведение определяется равенством $(\Delta(f))(x, y) = f(xy)$. Верно и обратное. Компактная квантовая группа (A, Δ) с коммутативной алгеброй A является алгеброй непрерывных функций на компактной группе.

Компактная квантовая группа – это алгебра функций на квантовой группе, которая отличается от алгебры функций на обычной компактной группе некоммутативностью.

Для компактных квантовых групп, аналогично теории *-алгебр Хопфа, вводится понятие функционала Хаара.

Пусть (A, Δ) – компактная квантовая группа и $\widehat{A}$ – пространство непрерывных линейных функционалов на A. Нормированное состояние $h \in \widehat{A}$ назовем *функционалом Хаара* на $\widehat{A}$, если для любого функционала $\rho \in \widehat{A}$ выполняются равенства

$$h * \rho = \rho * h = \lambda_\rho \cdot h, \ \lambda_\rho \in \mathbb{C}.$$

Здесь $*$ – произведение в $\widehat{A}$, порожденное копроизведением Δ на A. С.Л. Воронович[6] доказал, что для любой компактной квантовой группы существует единственный положительный функционал Хаара.

Глава 3 посвящена компактным квантовым полугруппам. Основные результаты опубликованы в работах [1], [2], [4], [5], [9].

В этой главе приводится конструкция компактной квантовой полугруппы на алгебре Теплица $\mathcal{T}$. Прежде показываются важные свойства этой алгебры, такие как разложимость операторов в ряд Фурье, критерий компактности. Конечная цель – исследование двойственной алгебры к алгебре Теплица, которая порождается квантовой структурой.

Теорема 3.3.1. *Существует копроизведение $\Delta \colon \mathcal{T} \to \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}$, такое что $(\mathcal{T}, \Delta)$ является компактной квантовой полугруппой, и при этом не является компактной квантовой группой.*

Показывается, что данная компактная квантовая полугруппа содержит в себе окружность S^1 как подгруппу. Существует неэргодическое действие S^1 на $(\mathcal{T}, \Delta)$. Алгебра неподвижных точек совпадает с коммутативной C*-алгеброй $\mathcal{T}_0$.

В 1998 г. Ф. Ли[13] определил объект, который явился естественным обобщением понятия алгебры Хопфа. Пусть A – алгебра (без нормы) с заданным на ней копроизведением $\Delta\colon A \to A \odot A$. Символом m обозначим отображение произведения трех элементов алгебры A, $m(a \otimes b \otimes c) = abc$.

Пусть существует линейное отображение $T\colon A \to A$, такое что

$$m(\mathrm{id} \otimes T \otimes \mathrm{id})(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id},$$

$$m(T \otimes \mathrm{id} \otimes T)(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = T.$$

Тогда A называется *слабой алгеброй Хопфа*, а T — *слабым антиподом.*

Классическим примером слабой алгебры Хопфа является полугрупповая алгебря инверсной полугруппы. В работе А.М. Вершика[12] доказан результат, из которого следует, что любая конечномерная полупростая кокоммутативная инволютивная биалгебра изоморфна слабой алгебре Хопфа.

Теорема 3.4.2. *В компактной квантовой полугруппе* $(\mathcal{T}, \Delta)$ *существует плотная подалгебра со структурой слабой алгебры Хопфа и копроизведением* Δ.

Заметим, что похожий результат известен в общем случае в теории компактных квантовых групп. Каждая компактная квантовая группа содержит плотную *-алгебру Хопфа. Этот факт доказывает, что обобщение топологической теории квантовых групп соответствует обобщениям алгебр Хопфа. В статье [4] предлагается один из вариантов такого обобщения, и предлагаются примеры компактных квантовых полугрупп с указанным выше свойством.

[13] F. Li. Weak Hopf algebras and some new solutions of the quantum Yang-Baxter equation // J. Algebra, vol. 208, no. 1, 1998, P. 72–100.

В разделе 3.5 при помощи квантовой структуры строится двойственная алгебра к алгебре Теплица $\mathcal{T}$.

Теорема 3.5.1. *С операцией умножения, индуцированной копроизведением на $\mathcal{T}$, пространство линейных непрерывных функционалов $\widehat{\mathcal{T}}$ является коммутативной банаховой унитальной алгеброй.*

С.Л. Воронович показал существование функционала Хаара для любой компактной квантовой группы. Однако, для компактной квантовой полугруппы функционал Хаара может и не существовать, в отличие от компактной квантовой группы. Пример такого объекта можно найти в работе Дж. Мерфи, Л. Тюсец[14]. Поэтому, для каждого нового примера компактной квантовой полугруппы возникает вопрос существования функционала Хаара.

Теорема 3.5.2. *В алгебре $\widehat{\mathcal{T}}$ существует функционал Хаара.*

Заметим, что данный функционал не является точным на алгебре $\mathcal{T}$ и даже на плотной подалгебре. Этот факт отличает приведенную конструкцию от случая компактных квантовых групп.

Обозначим через $\widehat{\mathcal{T}_0}$ пространство тех функционалов из $\widehat{\mathcal{T}}$, которые равны нулю на операторах из алгебры компактных операторов K.

Теорема 3.5.3. *Алгебра $\widehat{\mathcal{T}_0}$ изоморфна алгебре $M(S^1)$ регулярных борелевских мер на окружности со сверткой мер в качестве умножения.*

Последний раздел главы 3 посвящен исследованию продолжения теории мультипликативного унитария на компактную квантовую полугруппу. На примерах алгебры Теплица и алгебры непрерывных функций на компактной полугруппе с нулем показывается, что такой оператор u может не существовать для компактных квантовых полугрупп. Но с помощью пентагонального соотношения все-таки можно определить оператор на C^*-алгебре, который задает нетривиальное копроизведение, и таким образом является обобщением мультипликативного унитария.

[14] G.J. Murphy, L. Tuset. Aspects of quantum group theory // Proc. Amer. Math. Soc., vol. 132, no. 10, 2004, pp. 3055–3067.

Мультипликативным унитарием называется унитарный оператор $u \in B(H \otimes H)$, удовлетворяющий *пентагональному соотношению*:

$$u_{12}u_{13}u_{23} = u_{23}u_{12}.$$

Здесь используются обозначения, определяемые для любого оператора $a \in B(H \otimes H)$ следующим образом:

$$a_{12} = a \otimes I, \quad a_{23} = I \otimes a, \quad a_{13} = \sigma_{12}a_{23}\sigma_{12} = \sigma_{23}a_{12}\sigma_{23},$$

где σ — переставляющий автоморфизм, $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$.

Следующий результат хорошо известен в теории компактных квантовых групп, и впервые был получен С. Баажом и Ж. Скандалисом[15].

Пусть $(\mathcal{A}, \Delta)$ – компактная квантовая группа с функционалом Хаара h и (H_h, π_h) — ГНС-представление, соответствующее h. Тогда существует мультипликативный унитарий $u \in B(H_h \otimes H_h)$, такой что

$$(\pi_h \otimes \pi_h)\Delta(a) = u(\pi_h(a) \otimes I)u^*.$$

Теорема 3.7.3. *Не существует мультипликативного унитария для $(\mathcal{T}, \Delta)$, удовлетворяющего условию*

$$(\pi_h \otimes \pi_h)\Delta(a) = u(\pi_h(a) \otimes I)u^*.$$

Глава 4 посвящена полугрупповой C*-алгебре дискретной абелевой полугруппы с сокращением. Практически все понятия и результаты, изложенные в главе 4, опубликованы в работах [3], [7], [10].

Пусть G – компактная абелева группа, группа характеров которой изоморфна аддитивной дискретной группе Γ. Обозначим через S полугруппу, порождающую группу Γ, то есть

$$\Gamma = \{a - b |\ a, b \in S\}.$$

[15] Baaj S., Skandalis G. Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algébres // Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, 26, 1993, pp. 425-–488.

Предполагаем, что S содержит 0 – нейтральный элемент группы Γ, и не содержит группу, отличную от тривиальной.

Представление полугруппы S в $l^2(S)$ оператором сдвига $a \to T_a$ называется *регулярным представлением.* С*-алгебра, порожденная этим представлением обозначается $C^*_{\mathrm{red}}(S)$.

Л.А. Кобурн[16] доказал, что все изометрические (не унитарные) представления полугруппы $\mathbb{Z}_+$ порождают канонически изоморфные С*-алгебры. Позднее Р.Д. Дуглас[17] обобщил этот результат на полугруппы с полным порядком. Возник естественный вопрос: *каким свойством должна обладать полугруппа S, чтобы любые два изометрические представления порождали канонически изоморфные C^*-алгебры?* Ответ на этот вопрос изложен в работе [3].

Теорема 4.3.1. *Следующие два условия эквивалентны:*

1. *все изометрические неунитарные представления S порождают канонически изоморфные C^*-алгебры;*

2. *естественный порядок на полугруппе S является полным порядком.*

В главе 4 доказываются следующие свойства алгебр $C^*_{\mathrm{red}}(S)$.

Теорема 4.4.1. *C^*-алгебра $C^*_{\mathrm{red}}(S)$ является градуированной C^*-алгеброй и формально представляется в виде ряда*

$$C^*_{\mathrm{red}}(S) = \overline{\bigoplus_{c\in\Gamma} \mathfrak{A}_c}.$$

Здесь $\mathfrak{A}_0$ — коммутативная С*-подалгебра. Пространства $\mathfrak{A}_c$ в литературе носят название *спектральных подпространств.*

Теорема 4.5.2. *Существует нетривиальная динамическая система $(C^*_{\mathrm{red}}(S), G, \tau)$.*

[16]L.A. Coburn. The C*-algebra generated by an isometry // Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 1967, pp. 722–726.

[17]R.G. Douglas. On the C*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries // Acta Math., **128**, 1972, pp. 143–152.

Обозначим через K коммутаторный идеал алгебры $C^*_{\mathrm{red}}(S)$.

Лемма 4.6.4. *Элемент $A \in C^*_{\mathrm{red}}(S)$ принадлежит K тогда и только тогда, когда*

$$\varinjlim_{c \in S} T_c^* A T_c = 0.$$

Теорема 4.6.1. *Короткая точная последовательность*

$$0 \to K \xrightarrow{\mathrm{id}} C^*_{\mathrm{red}}(S) \xrightarrow{\xi} C(G) \to 0,$$

где id *– вложение, ξ – фактор-отображение, расщепима. То есть существует сохраняющее инволюцию отображение $\rho\colon C(G) \to C^*_{\mathrm{red}}(S)$ такое, что $\xi \circ \rho = \mathrm{id}$.*

Основной результат **главы 5** – построение для каждой абелевой полугруппы S с сокращением компактной квантовой полугруппы $(C^*_{\mathrm{red}}(S), \Delta)$. Этот и другие результаты главы 5 опубликованы в [10], [7].

Теорема 5.3.1. *Пара $(C^*_{\mathrm{red}}(S), \Delta)$ является компактной квантовой полугруппой и содержит плотную слабую алгебру Хопфа.*

Теорема 5.3.3. *Идеал K является коидеалом в $C^*_{\mathrm{red}}(S)$. Компактная квантовая полугруппа $(C^*_{\mathrm{red}}(S), \Delta)$ содержит классическую компактную квантовую подгруппу $(C(G), \Delta_G)$. Более того, определено неэргодическое действие G на $(C^*_{\mathrm{red}}(S), \Delta)$.*

Теорема 5.3.4. *Функционал Хаара в $(C^*_{\mathrm{red}}(S))^*$ существует и является чистым состоянием.*

Пусть $\mathcal{S}_{\mathrm{ab}}$ – категория дискретных абелевых полугрупп с сокращением, морфизмами в которой являются полугрупповые морфизмы. Обозначим через $\mathcal{QS}_{\mathrm{red}}$ категорию, объектами в которой являются компактные квантовые полугруппы $(C^*_{\mathrm{red}}(S), \Delta)$, построенные так как описано в данной главе, по всем полугруппам $S \in \mathtt{Obj}(\mathcal{S}_{\mathrm{ab}})$. Морфизмами в категории $\mathcal{QS}_{\mathrm{red}}$ являются морфизмы компактных квантовых полугрупп.

Теорема 5.4.1. *Существует инъективный функтор из категории $\mathcal{QS}_{\mathrm{red}}$ в категорию $\mathcal{S}_{\mathrm{ab}}$.*

В параграфе 3.3 на алгебре Теплица $\mathcal{T}$ была задана структура компактной квантовой полугруппы $(\mathcal{T}, \Delta)$. Возникает естественный вопрос, существует ли другое копроизведение на $\mathcal{T}$. С помощью конструкций, приведенных в главе 5 на алгебре Теплица можно задать столько структур компактных квантовых полугрупп, сколько существует полугрупп, порождающих $\mathbb{Z}$.

Автор выражает благодарность С.А. Григоряну за плодотворные обсуждения, способствовавшие улучшению диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

[1] **Аухадиев, М.А. Компактная квантовая полугруппа, порожденная изометрией / М.А. Аухадиев, С.А. Григорян, Е.В. Липачева // Изв. вузов. Математика. – 2011. – №10. – С. 89–93.**

[2] **Aukhadiev, M.A. Infinite-dimensional compact quantum semigroup / M.A. Aukhadiev, S.A. Grigoryan, E.V. Lipacheva // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2011. – Vol. 32. – №4. – P. 304–316.**

[3] **Aukhadiev, M.A. Isometric representations of totally ordered semigroups / M.A. Aukhadiev, V.H. Tepoyan // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2012. – Vol. 33. – №3. – P. 239–243.**

[4] Аухадиев, М.А. Компактные квантовые инверсные полугруппы / М.А. Аухадиев // Вестник Казанского государственного энергетического университета. – 2010. – Т. 7. – №4. – С. 57-66.

[5] Аухадиев, М.А. Бесконечномерная компактная квантовая полугруппа / М.А. Аухадиев, Е.В. Липачева // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. мат.о-ва, 2011. – Т. 43. – С. 21–23.

[6] Аухадиев, М.А. Структура некоторых C*-биалгебр / М.А. Аухадиев, В.А. Тепоян // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. мат.о-ва, 2011. – Т. 44. – С. 66–68.

[7] Аухадиев, М.А. Компактные квантовые полугруппы, порожденные абелевыми полугруппами / М.А. Аухадиев, С.А. Григорян, Е.В. Липачева // Материалы международной научно-практической конференции "Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук". – Казань: Казан. ун-т, 2012. – Ч. 1. – С. 104–106.

[8] Аухадиев, М.А. Способ задания структуры компактной квантовой полугруппы / М.А. Аухадиев // Материалы международной научно-практической конференции "Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук". – Казань: Казан. ун-т, 2012. – Ч. 1. – С. 125–126.

[9] Аухадиев, М.А. Построение структуры биалгебры на алгебре Теплица / М.А. Аухадиев // Материалы докладов первой всероссийской молодежной научной конференции "Тинчуринские чтения". – Казань: КГЭУ, 2011. – С. 261–262.

[10] Aukhadiev, M.A. The semigroup C*-algebra as an algebra of functions on quantum semigroup // M.A. Aukhadiev // Тр. мат. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. мат. о-во, 2012. – Т. 46. – С. 230–232.